Sistem Linier Time Invariant

Toha Ardi Nugraha

ANALISIS SISTEM LTI

- **Metoda analisis sistem linier**
- **Resolusi sinyal waktu diskrit**
- **Respon sistem LTI**
- **Sifat-sifat konvolusi**
- **Sistem FIR dan IIR**
- **Kausalitas sistem LTI**

METODA ANALISIS SISTEM LINIER

- **Metoda Langsung**
  - **Konvolusi**
  - **Persamaan Beda (Difference Equation)**
- **Metoda Tidak langsung**
  - **Transformasi Z**

Jawab langsung dari hubungan input-output :

$$y(n) = F[y(n-1), \cdots, y(n-N), x(n), x(n-1), \cdots, x(n-M)]$$

Sistem LTI :

$$y(n) = \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k) + \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

$\Downarrow$

Persamaan Beda

$\{a_k\}$ dan $\{b_k\}$ parameter-parameter konstanta tidak tergantung pada x(n) atau y(n)

- Sinyal input diuraikan menjadi sejumlah sinyal-sinyal dasar
- Sinyal-sinyal dasar dipilih agar respon sistem terhadapnya mudah ditentukan
- Menggunakan sifat linier, respon total adalah jumlah dari respon sinyal-sinyal dasar

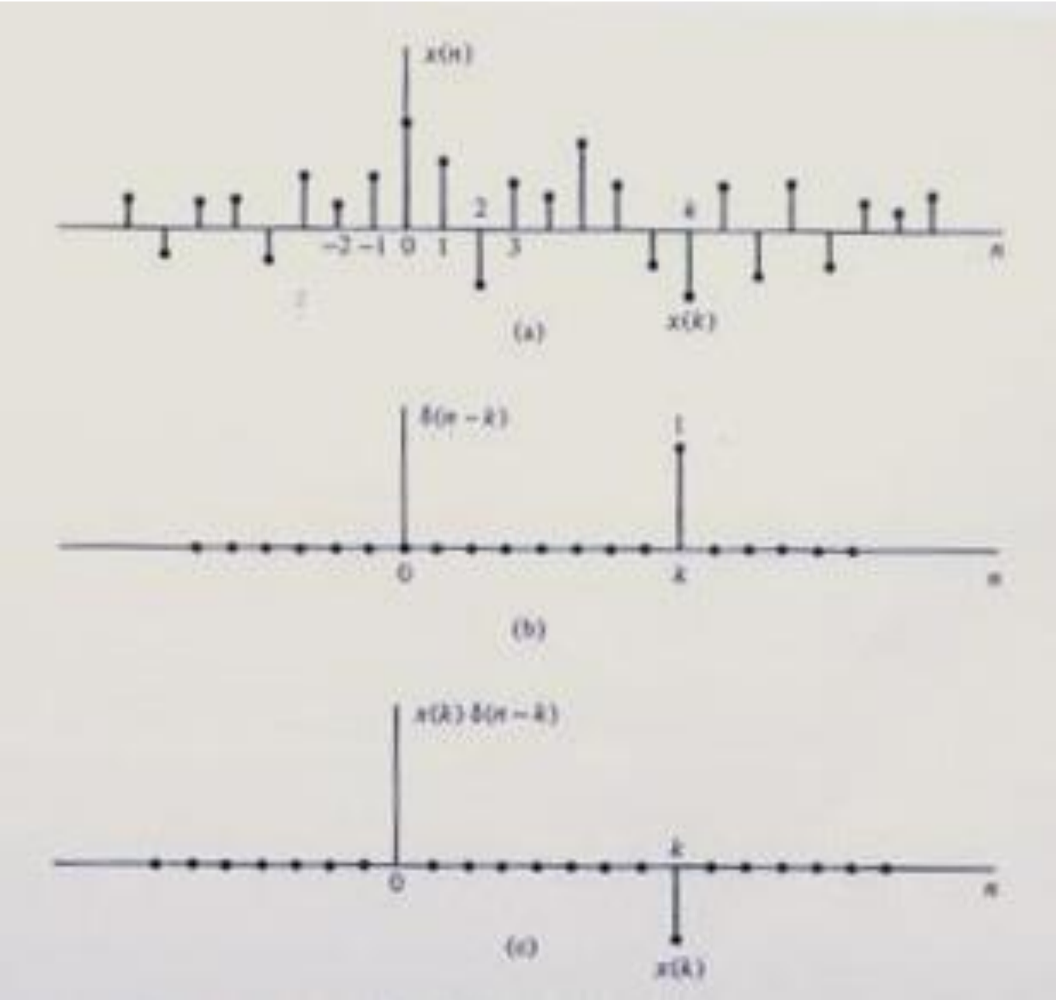
$$x(n) = \sum_k c_k x_k(n) \qquad y_k(n) = T[x_k(n)]$$

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_k c_k x_k(n)\right]$$

$$= \sum_k c_k T[x_k(n)] = \sum_k c_k y_k(n)$$

RESOLUSI SINYAL WAKTU DISKRIT

- **Dipilih sinyal unit impuls sebagai sinyal dasar**



$$x_k(n) = \delta(n-k)$$

$$x(n)\delta(n-k) = x(k)\delta(n-k)$$

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Contoh Soal 6.1

Diketahui sinyal dengan durasi terbatas $x(n) = \{2, 4, 0, 3\}$

Nyatakan sinyal ini dalam unit impuls

Jawab :

$$x(n) = \sum_{k=-1}^{2} x(k)\delta(n-k)$$

$$x(n) = x(-1)\delta(n+1) + x(0)\delta(n) + x(1)\delta(n-1) + x(2)\delta(n-2)$$

$$x(n) = 2\delta(n+1) + 4\delta(n) + 3\delta(n-2)$$

❑ RESPON SISTEM LTI

- **Unit impuls sebagai input**

$$y(n,k) = T[\delta(n-k)] = \boxed{h(n,k)} \Longrightarrow$$ **Respon impuls**

- **Sinyal input dinyatakan dengan unit impuls**

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

- **Sinyal output dinyatakan dengan unit impuls**

$$y(n) = T[x(n)] = T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)\right]$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)T[\delta(n-k)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n,k)$$

- **Sistem time-invariant :**

$$h(n) = T[\delta(n)] \quad \rightarrow \quad h(n-k) = T[\delta(n-k)]$$

- **Sistem linier dan time-invariant (LTI) :**

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \quad \Rightarrow \quad y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Konvolusi

KONVOLUSI (4 operasi)

- **Operasi folding** $h(k) \rightarrow h(-k)$
- **Operasi shifting** $h(-k) \rightarrow h(n-k)$
- **Operasi perkalian** $x(k)\,h(n-k)$
- **Operasi penjumlahan** $\sum_{k=-\propto}^{\propto} x(k)h(n,k)$

Contoh Soal 6.2

Respon impuls suatu sistem LTI adalah :

$$h(n) = \{1, \underset{\uparrow}{2}, 1, -1\}$$

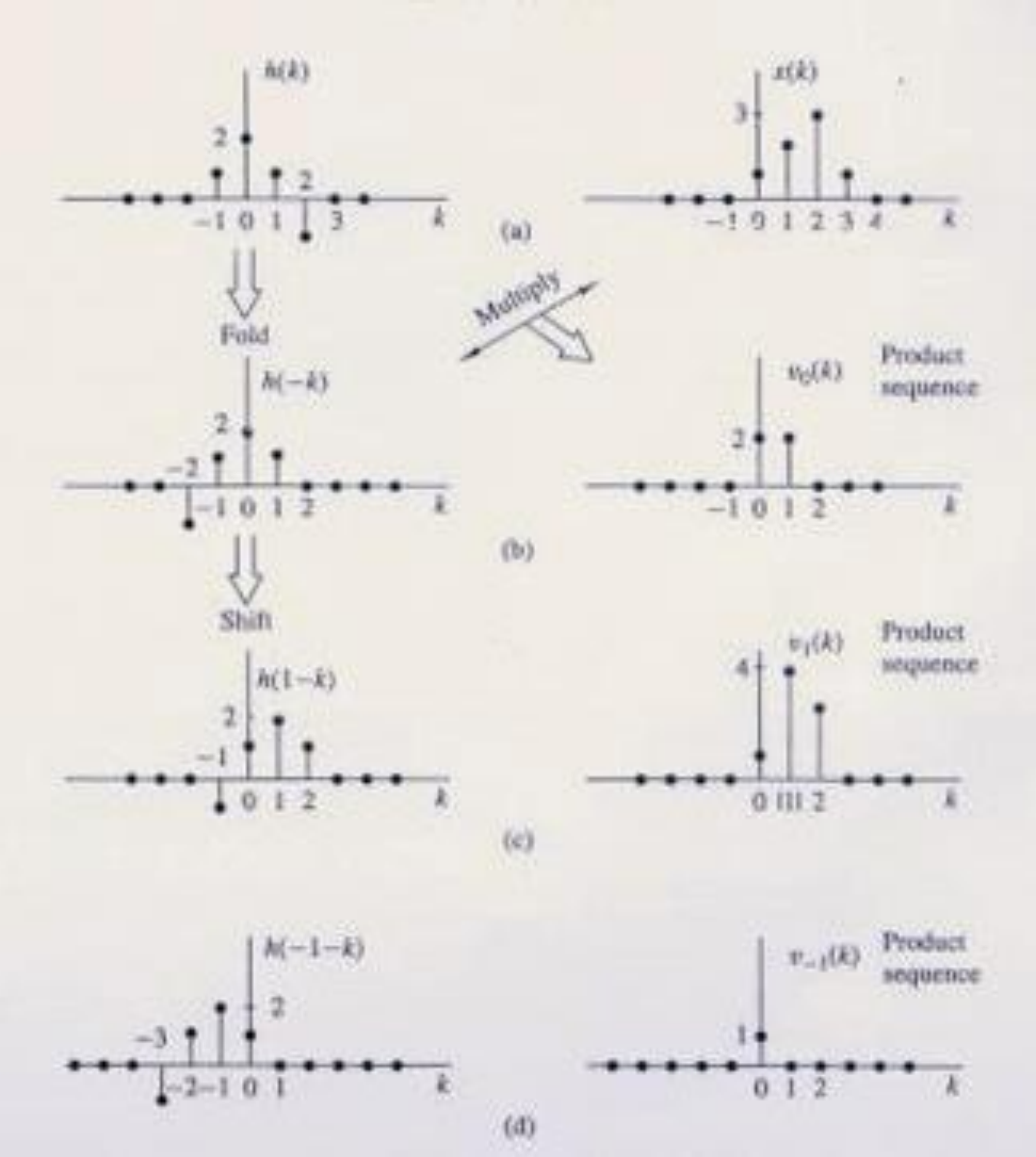
Tentukan respon dari sistem bila inputnya :

$$x(n) = \{\underset{\uparrow}{1}, 2, 3, 1\}$$

Jawab :

$$v_n(k) = x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} v_n(k)$$



$$h(n) = \{1, 2, 1, -1\}$$

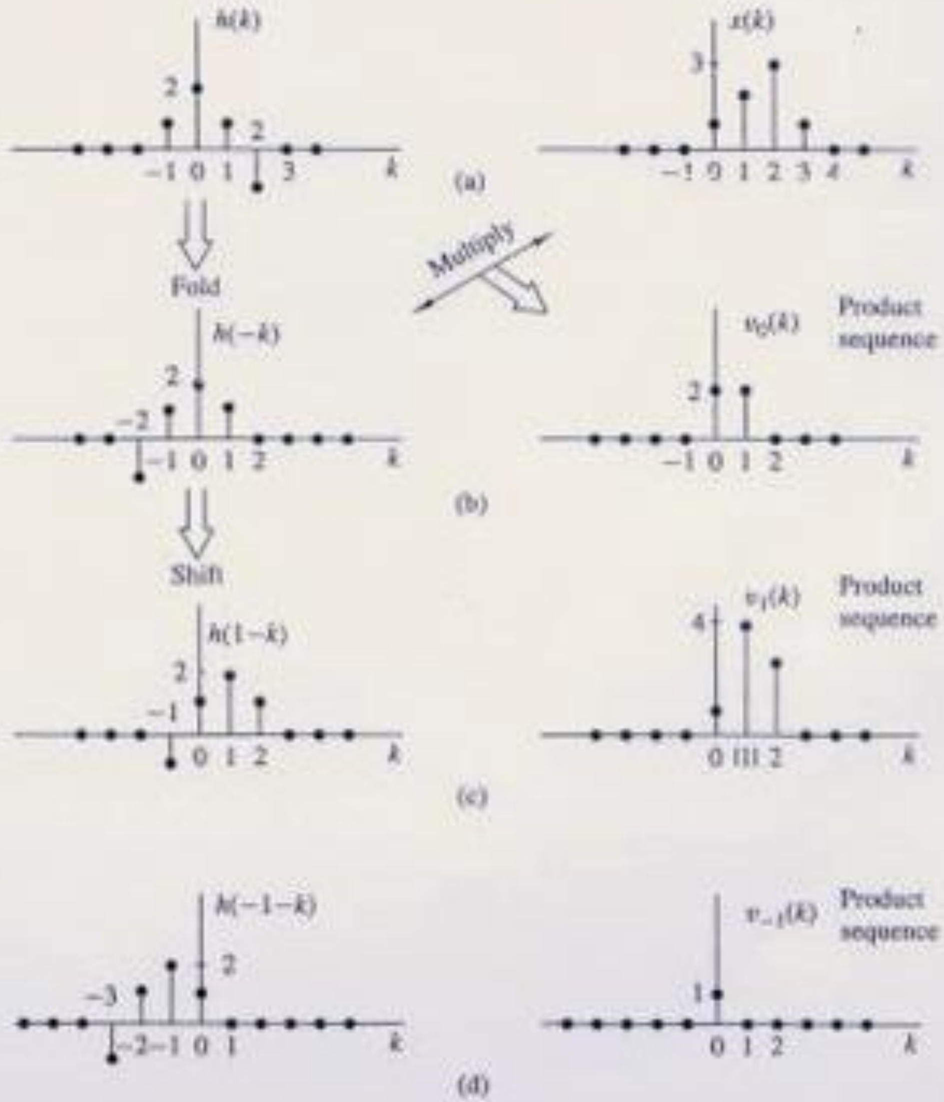
$$x(n) = \{1, 2, 3, 1\}$$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-k)$$

$$v_0(k) = x(k)h(-k)$$

$$y(0) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_0(k) = 4$$

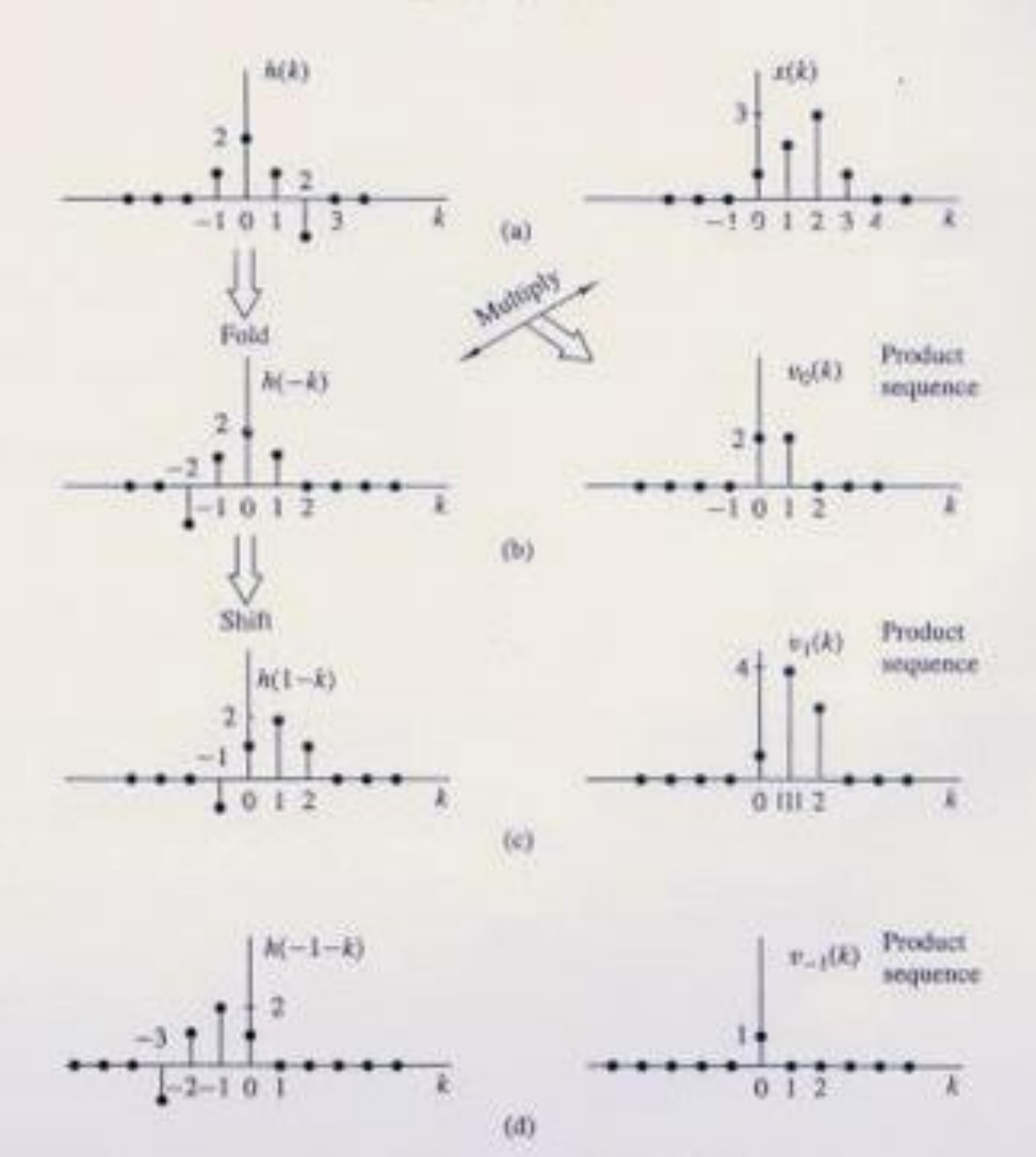


$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(1-k)$$

$$v_1(k) = x(k)h(1-k)$$

$$y(1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_1(k) = 8$$



$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(-1-k)$$

$$v_{-1}(k) = x(k)h(-1-k)$$

$$y(-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} v_{-1}(k) = 1$$

$x(n) = \{\ldots, 1, 4, 8, 8, 3, -2, -1, 0, \ldots\}$

$$y(n) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} x(k)h(n-k)$$

$$m = n - k \quad \rightarrow \quad k = n - m$$

$$y(n) = \sum_{m=-\propto}^{\propto} x(n-m)h(m)$$

$$y(n) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} x(n-k)h(k)$$

$$\sum_{k=-\propto}^{\propto} x(n-k)h(k) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} h(n-k)x(k)$$

Contoh Soal 6.3

Tentukan output y(n) dari sistem LTI dengan respon impuls :

$$h(n) = a^{n}u(n), \ |a| < 1$$

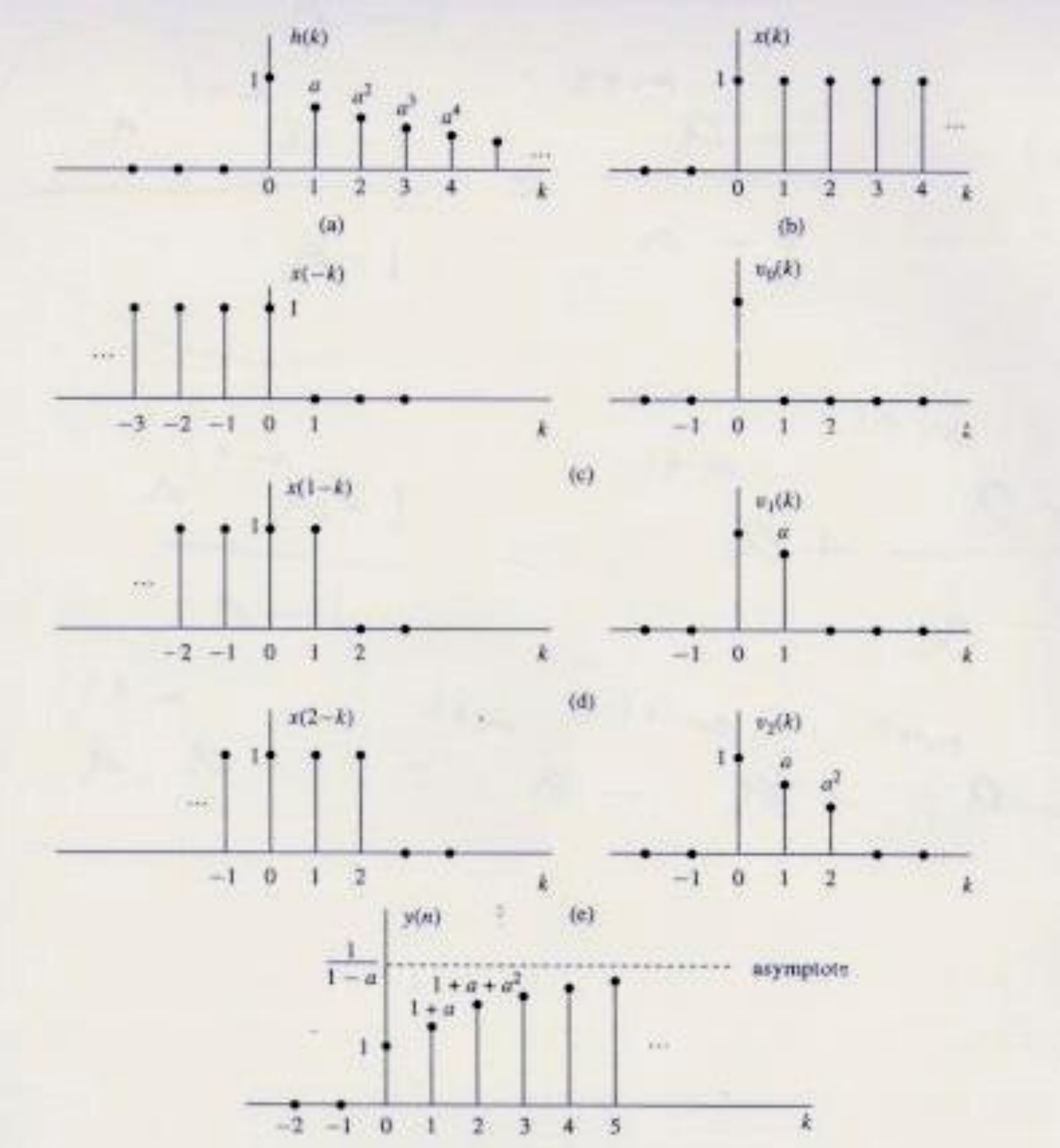
bila inputnya suatu unit step, yaitu :

$$x(n) = u(n)$$

Jawab :

h(k) tetap, x(k) yang di folding dan digeser menjadi x(n - k)

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(n-k)h(k)$$



$$y(0) = 1$$

$$y(1) = 1 + a$$

$$y(2) = 1 + a + a^2$$

$$y(n) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^2 = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$$

Latihan Soal 6.1

Tentukan output y(n) dari sistem LTI dengan respon impuls :

$$\{3\ 2\ 1\}$$

bila inputnya :

$$\{1\ 2\ 2\ 1\ 1\}$$

Jawab :

$$y(n) = \{3\ 8\ 11\ 9\ 7\ 3\ 1\}$$

Latihan Soal 6.2

Tentukan output y(n) dari sistem LTI dengan respon impuls :

$$\{1\ 1\ 0\ 1\}$$

bila inputnya :

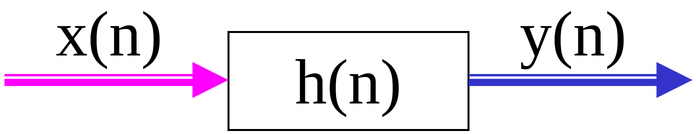
$$\{1\ 2\ 2\ 3\}$$

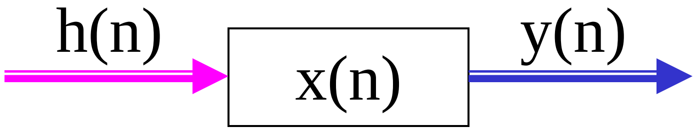
Jawab :

$$y(n) = \{1\ 3\ 4\ 6\ 5\ 2\ 3\}$$

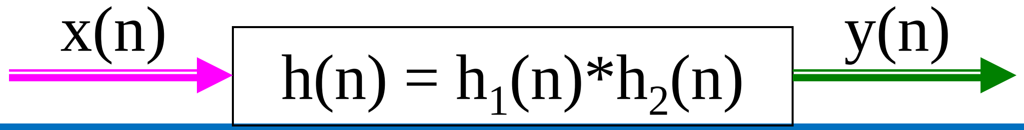
❑ SIFAT-SIFAT KONVOLUSI

- **Komutatif** $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$



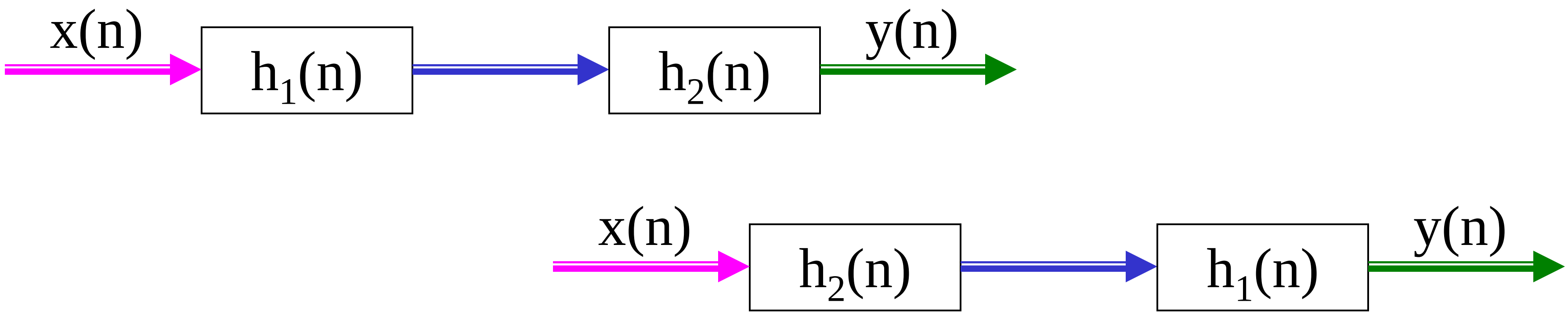


- **Asosiatif** $[x(n) * h_1(n)] * h_2(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]$



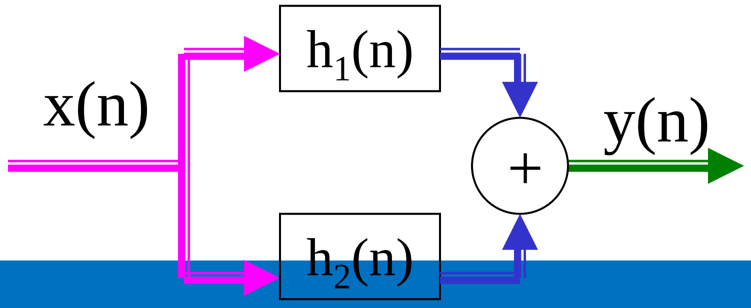
SIFAT-SIFAT KONVOLUSI

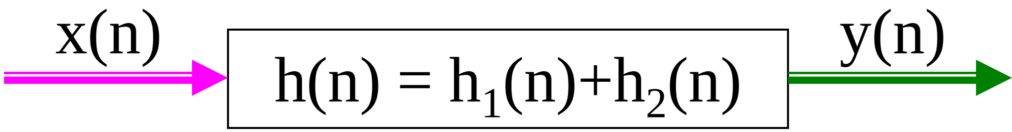
- **Asosiatif dan komutatif** $x(n) * h(n) = h(n) * x(n)$



- **Distributif**

$$x(n) * [h_1(n) + h_2(n)] = x(n) * h_1(n) + x(n) * h_2(n)$$





Contoh Soal 6.4

Tentukan respon impuls h(n) dari dua sistem LTI yang dihubungkan seri (kaskade), yang masing-masing mempunyai respon impuls :

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad\qquad h_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

Jawab :

Asosiatif $\longrightarrow$ $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

$$h(n) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} h_1(k)h_2(n-k) = \sum_{k=-\propto}^{\propto} v_n(k)$$

$$h_1(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \qquad h_2(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n)$$

$$v_n(k) = h_1(k)h_2(n-k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k}$$

$$n < 0 \quad \rightarrow \quad v_n(k) = 0 \quad \rightarrow \quad h(n) = 0,\ n < 0$$

$$k \geq 0 \quad n - k \geq 0 \quad n \geq k \geq 0 \quad \rightarrow \quad v_n(k) \neq 0$$

$$h(n) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{4}\right)^n \sum_{k=0}^{n} 2^k$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^n (2^{n+1} - 1) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

SISTEM FIR DAN IIR

- **Sistem FIR**
  - **Finite-duration Impuls Response**

$$h(n) = 0, \quad n < 0 \text{ dan } n \geq M$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{M-1} h(k)x(n-k)$$

- **Output pada waktu n = kombinasi linier dari input-input :**

x(n), x(n-1), ……., x(n-M+1)

yang diberi bobot dengan harga-harga respon impuls :

h(k), k = 0, 1, ……, M-1

- **Mempunyai memori terbatas sebanyak M**

- **Sistem IIR**
  - **Infinite-duration Impuls Response**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

- **Output pada waktu n = kombinasi linier dari input-input :**

  x(n), x(n-1), x(n-2), ………

  yang diberi bobot dengan harga-harga respon impuls :

  h(k), k = 0, 1, ……

- **Mempunyai memori tak terbatas**

KAUSALITAS SISTEM LTI

- **Sistem Kausal**
  - **Output tidak tergantung pada input yang akan datang**

$$y(n_o) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n_o - k)$$

$$y(n_o) = \sum_{k=-\infty}^{-1} h(k)x(n_o - k) + \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n_o - k)$$

$$y(n_o) = [h(-1)x(n_o + 1) + h(-2)x(n_o + 2) + \cdots]$$
$$+ [h(0)x(n_o) + h(1)x(n_o - 1) + \cdots]$$

$h(n) = 0 \quad n < 0$ ⟹ Sistem Kausal

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n - k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n - k)$$

- **Sistem dan Input Kausal**
  - **$h(n) = 0, n < 0$ $x(n) = 0, n < 0$**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

Contoh Soal 6.5

Respon impuls dari suatu sistem LTI adalah :

$$h(n) = a^{n}u(n) \qquad |a| < 1$$

Tentukan outputnya bila inputnya unit step x(n) = u(n)

Jawab :

Sistem dan input kausal

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} h(k)x(n-k) = \sum_{k=0}^{n} x(k)h(n-k)$$

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} a^{k} \longrightarrow y(n) = \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$